Chapitre 37

Séries numériques

Plan du chapitre

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites à valeur dans $\mathbb{K}$, i.e. deux éléments de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

1 Séries numériques

1.1 Définitions et notations

Définition 37.1

On appelle <u>série de terme général u_n</u> la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

Le scalaire $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est appelé <u>somme partielle d'ordre n</u> (de la série).

Notation. La somme partielle d'ordre n est généralement notée

$$\sum u_n \quad \text{ou} \quad \sum_{n\geq 0} u_n \quad \text{ou encore} \quad \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$$

La notation "S_n" pour la somme partielle est purement arbitraire. On peut donc l'appeler différemment et il faut toujours introduire cette notation : "On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$".

Une série est donc un cas particulier de suite, et toutes les notions et résultats vus pour les suites peuvent s'étendre aux séries, par exemple la convergence.

Définition 37.2 (Convergence d'une série)

Pour toute série $\sum u_n$, on distingue deux cas :

- La série $\sum u_n$ est dite <u>convergente</u> si la somme partielle $\sum_{k=0}^{n} u_k$ admet une limite **finie** quand n tend vers $+\infty$. Cette limite est appelée la <u>somme</u> de la série $\sum u_n$.
- Sinon, on dit que la série $\sum u_n$ est <u>divergente</u>.

Notation. En cas de convergence, on note la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n := \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k \quad \in \mathbb{K}$.

Attention aux différentes notations : si on note S_n la somme partielle de $\sum u_n$, alors :

- $\sum u_n$ correspond à la suite (S_n) et est appelé la série de terme général u_n : c'est donc un cas particulier de suite. Cela a donc du sens de dire qu'elle converge, diverge, qu'elle est croissante, etc. Ici, le n est muet.

- $\sum_{k=0}^{n} u_k$ correspond à S_n et est appelé la somme partielle (de rang n) : c'est un élément de $\mathbb{K}$ égal à $u_0 + \cdots + u_n$. Ici n est un élément de $\mathbb{N}$ fixé qui n'est pas muet. Par contre k est muet.

- $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ correspond à $\lim_{n\to+\infty} S_n$: c'est, lorsqu'elle existe, la limite de $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ quand n tend vers $+\infty$, ou encore la limite de la série $\sum u_n$ (et on appelle cette limite la somme de la série). On ne peut donc écrire $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ qu'après avoir justifié son existence.

Remarque. Si on demande d'étudier la nature d'une série, il s'agit de déterminer si elle est convergente ou divergente (comme pour une suite), sans forcément calculer la somme.

Exemple 1. Étudier la nature de la série $\sum(-1)^n$.

1.2 Extensions et propriétés évidentes

Indice de départ différent de 0. Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n$ désigne la suite $(S_n)_{n \geq n_0}$ définie par :

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k \qquad \text{dont la limite éventuelle est notée} \qquad \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$$

Propriété 37.3

Pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$, les suites $\sum u_n$ et $\sum\limits_{n \geq n_0} u_n$ ont la même nature.

La nature d'une série ne dépend donc pas des premiers termes.

Divergence grossière. Si S_n est la somme partielle de la série $\sum u_n$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_0 = S_0 \qquad \text{et} \qquad u_n = S_n - S_{n-1}$$

Cela permet de déduire la Propriété suivante.

Propriété 37.4

Soit $\sum u_n$ une série convergente. Alors $u_n \to 0$.

Si u_n ne tend pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ est divergente : on dit qu'elle est grossièrement divergente.

Démonstration. En effet, si on note ℓ la somme de la série (donc la limite de la somme partielle S_n), alors pour tout $n \geq 1$,

$$u_n = S_n - S_{n-1} \to \ell - \ell = 0$$

La deuxième assertion découle de la première par contraposée. □

Exemple 2. Les séries $\sum(-1)^n$ et $\sum \sin n$ sont grossièrement divergentes.

Le fait que $u_n \to 0$ ne permet pas de conclure sur la nature de $\sum u_n$: on verra notamment que $\sum \frac{1}{n}$ est divergente.

Série télescopique

Définition 37.5

On appelle <u>série télescopique</u> une série $\sum u_n$ dont le terme général est écrit sous la forme $u_n = v_{n+1} - v_n$ pour une certaine suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Propriété 37.6 (Nature et séries télescopiques)

Une suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série télescopique $\sum(v_{n+1} - v_n)$ converge et dans ce cas

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(v_{n+1} - v_n) = \lim_{n\to+\infty} v_n - v_0$$

Remarque. Quitte à faire un changement d'indice dans la série, on peut dire également que $\sum_{n\geq 1}(v_n - v_{n-1})$ converge si et seulement si (v_n) converge.

Exemple 3. La série $\sum_{n\geq 1}(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})$ est une série télescopique : comme la suite $\left(\sqrt{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, cette série est également divergente. Est-ce qu'il y a divergence grossière ?

Exemple 4. Déterminer si la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ est convergente et calculer la limite / somme éventuelle.

1.3 Séries classiques

Propriété 37.7

Soit $q \in \mathbb{C}$. La série $\sum q^n$ est appelée <u>série géométrique de raison q</u>. Cette série converge si et seulement si $|q| < 1$, et sa somme vaut alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q = \frac{1}{1-q}$$

Démonstration.

- Si $|q| \geq 1$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|q^n| = |q|^n \geq 1$, donc q^n ne peut pas tendre vers 0 : la série diverge grossièrement.

- Si $|q| < 1$, alors $q \neq 1$ et la somme partielle vaut, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q} \qquad \text{car } |q| < 1$$

□

Propriété 37.8

Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est convergente et sa somme vaut $\boxed{e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}}$

Démonstration. On va appliquer l'inégalité de Taylor-Lagrange à la fonction
$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ t &\mapsto e^{tz} \end{aligned}$$
Cette application est de classe C^∞ sur $[0,1]$. De plus, on remarque que
$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad f^{(k)}(t) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a en particulier
$$\forall t \in [0,1] \qquad \left|f^{(n+1)}(t)\right| = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
et donc
$$\forall t \in [0,1] \qquad \left|f^{(n+1)}(t)\right| \leq M \qquad \text{avec} \qquad M = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
Ainsi, par l'inégalité de Taylor-Lagrange appliqué à la fonction f au point 0 et à l'ordre n, on a :

□

Parmi les séries classiques, on trouve aussi la série harmonique et les séries de Riemann, cf plus loin.

1.4 Propriétés

On a vu que $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ est un $\mathbb{K}$-e.v. : puisque les séries sont des suites, on peut définir les opérations $+$ et de multiplications pour des séries également : pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{n\geq n_0} u_n\right) + \left(\sum_{n\geq n_0} v_n\right) := \sum_{n\geq n_0} (u_n + v_n)$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} \qquad \lambda\left(\sum_{n\geq n_0} u_n\right) := \sum_{n\geq n_0} (\lambda u_n)$$

Par ailleurs, avec les séries, on trouve souvent les raccourcis “CV” pour “convergente” et “DV” pour “divergente”.

Propriété 37.9 (“CV + CV = CV”)

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries convergentes. Alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Autrement dit, toute combinaison linéaire de séries convergentes est une série convergente : l’ensemble des séries convergentes forme un s.e.v. de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. De plus, l’application qui à une série convergente associe sa somme est linéaire.

Exemple 5 (“DV + CV = DV”). Soit $\sum u_n$ une série DV et $\sum v_n$ une série CV. Montrer que $\sum(u_n + v_n)$ diverge.

Remarque. La Propriété et l’exemple ci-dessus montrent en particulier que l’on ne change pas la nature d’une série en lui ajoutant une série convergente.

Exemple 6 (“DV + DV = ?”). Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont des séries DV, on ne peut rien dire sur la nature de $\sum(u_n + v_n)$:

- $\sum 1$ et $\sum n$ divergent (grossièrement), il en va de même pour $\sum(1+n)$
- $\sum 1$ et $\sum(-1)$ divergent mais leur somme est une série qui converge vers 0.

Attention ! Avant d’écrire

$$\text{”} \quad \sum_{n=0}^{+\infty}(u_n + v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n \quad \text{”}$$

il faut s’assurer que toutes ces sommes aient un sens (ou au moins deux d’entre elles, car alors la troisième a un sens et se déduit des deux autres).

2 Séries à termes (réels) positifs

2.1 Généralités

Dans cette section, on suppose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Définition 37.10

On dit que $\sum u_n$ est (une série) à termes positifs si le terme général u_n est un réel positif.

En particulier, si on note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ la somme partielle de rang $n \in \mathbb{N}$, alors la suite (S_n) est croissante puisque :

$$S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geq 0$$

Enfin, on a vu qu'une suite croissante converge ssi elle est majorée. Cela permet de justifier la propriété suivante :

Propriété 37.11 ("CV par la somme partielle")

Soit $\sum u_n$ une série à termes **positifs**. On note $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ sa somme partielle (de rang n). Alors :

- $\sum u_n$ converge ssi la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée. De plus,

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq \sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$$

- $\sum u_n$ tend vers $+\infty$ (donc diverge) ssi la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non majorée.

Pour déterminer la nature de $\sum u_n$, on peut donc vérifier si la somme partielles S_n est majorée (indépendamment de n !). Toutefois, il est souvent plus facile d'invoquer un argument de comparaison.

2.2 Convergence par inégalités, équivalents, O, o

Théorème 37.12 ("CV par une inégalité")

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes **positifs** telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq u_n \leq v_n$$

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et l'on a $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge (et les deux limites sont $+\infty$).

Si la comparaison $u_n \leq v_n$ n'est valable qu'à partir du rang n_0, on peut appliquer le théorème ci-dessus aux séries $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$: on obtient ainsi le même résultat, mais en cas de convergence des deux séries, on a seulement

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$$

Exemple 7. Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{\cos^2 n}{2^n}$.

Propriété 37.13 (Règle des O et des o)

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes **positifs** telles qu'on ait $u_n = O(v_n)$ ou $u_n = o(v_n)$.

- Si $\sum v_n$ CV, alors $\sum u_n$ CV.
- Si $\sum u_n$ DV, alors $\sum v_n$ DV.

Démonstration. On suppose $u_n = O(v_n)$. Il existe donc $M > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq u_n \leq M v_n$. Par le théorème d'encadrement, on en déduit les assertions voulues à ceci près que $\sum v_n$ est remplacé par $\sum M v_n$. Mais ces deux séries ont la même nature. D'où le résultat.
On suppose $u_n = o(v_n)$. Alors en particulier $u_n = O(v_n)$ et par ce qui précède, on a terminé. $\square$

Exemple 8. Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{\ln n}{3^n}$.

Propriété 37.14 (Règle des équivalents)

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des séries à termes **positifs** telles que $u_n \sim v_n$. Alors $\sum u_n$ CV $\iff \sum v_n$ CV.
Autrement dit, $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont la même nature.

En cas de convergence de $\sum u_n$ et $\sum v_n$, leurs limites / sommes ne sont pas nécessairement égales.

Démonstration. On suppose $u_n \sim v_n$. Alors $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$. Par la propriété précédente, on a $\sum u_n$ CV $\implies \sum v_n$ CV et réciproquement $\sum v_n$ CV $\implies \sum u_n$ CV. D'où le résultat. □

Exemple 9. Déterminer la nature de la série $\sum \sin\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Remarque. Attention à bien respecter l'hypothèse de positivité qui est essentielle ! La Propriété 37.14 tombe en défaut si (u_n) et (v_n) peuvent être de signe quelconque (on le verra en TD).

Remarque. Si (u_n) et (v_n) sont positives uniquement à partir d'un certain rang n_0, les résultats ci-dessus restent valides, on l'appliquera aux séries $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$, qui ont la même nature que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.

Propriété 37.15 (Hors-programme : " Théorème de CV par encadrement ")

Soit (a_n), (b_n) et (c_n) trois suites à valeurs dans $\mathbb{R}$ (et non $\mathbb{R}_+$), alors

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \leq b_n \leq c_n \\ \sum a_n \text{ CV} \\ \sum c_n \text{ CV} \end{cases} \implies \sum b_n \text{ CV}$$

Contrairement au théorème d'encadrement des suites, $\sum a_n$ et $\sum c_n$ ne doivent pas nécessairement converger vers la même limite.

Démonstration.

$\square$

Il peut sembler étrange que ce théorème soit hors-programme, cependant il n'est guère utile en pratique. Si $\sum b_n$ est à termes positifs, alors le théorème de comparaison suffit. Sinon, on verra d'autres théorèmes de convergence qui recouvrent pratiquement tous les cas d'utilisation de ce théorème.

2.3 Comparaison série-intégrale

Méthode

Soit f une fonction continue et décroissante. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\forall t \in [n-1, n] \qquad f(t) \leq f(n)$$

ce qui permet d'écrire, en intégrant en t de $n-1$ à n :

$$\int_{n-1}^{n} f(t)dt \geq f(n) \qquad \left(= \int_{n-1}^{n} f(n)dt \right)$$

On montre de même que $f(n) \geq \displaystyle\int_{n}^{n+1} f(t)dt$, ce qui permet d'écrire

$$\int_{n}^{n+1} f(t)dt \leq f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(t)dt$$

En sommant ces inégalités pour n allant de 1 à N avec $N \in \mathbb{N}^*$, on obtient

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{n}^{n+1} f(t)dt \leq \sum_{n=1}^{N} f(n) \leq \sum_{n=1}^{N} \int_{n-1}^{n} f(t)dt$$

$$\implies \qquad \int_{1}^{N+1} f(t)dt \leq \sum_{n=1}^{N} f(n) \leq \int_{0}^{N} f(t)dt$$

Cette méthode fournit un encadrement de la série $\sum f(n)$: elle peut permettre de montrer la convergence ou la divergence d'une série par comparaison / encadrement, car les intégrales ci-dessus sont souvent plus faciles à calculer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{N} f(n)$.

Cette méthode marche également si f est croissante, mais en pratique c'est beaucoup plus rare. De plus, cela fonctionne encore si on suppose f continue par morceaux sur tout segment de $[0, +\infty[$. Enfin, on s'en sert très souvent avec des séries à termes positifs (donc $f \geq 0$), auquel cas un encadrement d'un seul côté suffit pour appliquer le théorème de comparaison.

Propriété 37.16

La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente. On l'appelle la série harmonique.

Pour montrer la *divergence* de $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$, on va *minorer* le terme général $\frac{1}{n}$ par une comparaison série-intégrale :

Démonstration.

□

Propriété 37.17

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ est appelée une série de Riemann. Elle converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Démonstration.

- Si $\alpha \leq 0$, la série diverge grossièrement.
- Le cas $\alpha = 1$ a été traité : il s'agit de la série harmonique et on sait qu'elle diverge. Le cas suivant suit le même principe : une minoration pour montrer une divergence.
- Si $0 < \alpha < 1$, alors la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, si bien que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{n^\alpha} \geq \int_n^{n+1} \frac{1}{t^\alpha} dt$$

ce qui après sommation pour n allant de 1 à $N \in \mathbb{N}^*$ donne

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} &\geq \int_1^{N+1} t^{-\alpha} dt \\ &= \left[\frac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1}\right]_1^{N+1} \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left((N+1)^{1-\alpha} - 1\right)\end{aligned}$$

et comme $1-\alpha > 0$, le dernier terme tend vers $+\infty$ quand N tend vers $+\infty$. Donc par comparaison, la série de Riemann diverge lorsque $0 < \alpha < 1$.

- On suppose $\alpha > 1$. Pour montrer la *convergence* de $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, on va *majorer* le terme général $\frac{1}{n^\alpha}$.

$\square$

3 Séries à termes réels (quelconques) ou complexes

3.1 Se ramener à des séries à termes positifs

Le lemme qui suit n'a que peu d'intérêt pratique mais servira à démontrer le théorème en début de section suivante. Étant donné un réel x, on note

$$x^+ := \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases} \qquad x^- := \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

on a donc les relations suivantes :

$$x^- \geq 0, \qquad x^+ \geq 0, \qquad x = x^+ - x^-, \qquad |x| = x^+ + x^-$$

Lemme 37.18

Soit $\sum u_n$ une série à termes réels. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ convergent, et si c'est le cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^+ - \sum_{n=0}^{+\infty} u_n^-$$

On notera que $\sum u_n^+$ et $\sum u_n^-$ sont des séries à termes positifs, on peut donc leur appliquer les résultats de la section précédente.

Propriété 37.19

Soit $\sum u_n$ une série à termes complexes. La série $\sum u_n$ converge si et seulement si les séries $\sum \operatorname{Re} u_n$ et $\sum \operatorname{Im} u_n$ convergent, et si c'est le cas :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re} u_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im} u_n$$

On notera que $\sum \operatorname{Re} u_n$ et $\sum \operatorname{Im} u_n$ sont des séries à termes réels. L'étude d'une série complexe peut donc se faire en se ramenant aux séries réelles.

3.2 Séries absolument convergentes

Définition 37.20

On dit que la série $\sum u_n$ est absolument convergente si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

On notera que $\sum |u_n|$ est à termes positifs, ce qui permet d'appliquer les résultats associés à ce type de série.

Théorème 37.21

Toute série absolument convergente est convergente.
La réciproque est fausse (cf ci-après).

Démonstration. Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente, donc $\sum |u_n|$ converge.

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, alors, comme
$$0 \leq u_n^- \leq |u_n| \qquad \text{et} \qquad 0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$$
on en déduit par comparaison que les séries $\sum u_n^-$ et $\sum u_n^+$ sont convergentes. Ainsi, par linéarité, $\sum u_n = \sum (u_n^+ - u_n^-)$ est également convergente.
- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on a
$$0 \leq |\operatorname{Re} u_n| \leq |u_n| \qquad \text{et} \qquad 0 \leq |\operatorname{Im} u_n| \leq |u_n|$$
et donc par comparaison les séries $\sum \operatorname{Re} u_n$ et $\sum \operatorname{Im} u_n$ sont *absolument* convergentes. Comme ce sont des séries à termes réels, par ce qui précède elles sont convergentes. Ainsi par linéarité, $\sum u_n = \sum (\operatorname{Re} u_n + i \operatorname{Im} u_n)$ est également convergente.

$\square$

Exemple 10. La série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in^n}}{n^2}$ est convergente : en effet pour tout $n \geq 1$ on a $\displaystyle\left|\frac{e^{in^n}}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n^2}$ et la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente (c'est une série de Riemann). Donc par comparaison, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{e^{in^n}}{n^2}$ est absolument convergente donc convergente.

Définition 37.22

On dit qu'une série $\sum u_n$ est <u>semi-convergente</u> si elle est convergente mais pas absolument convergente.

Exemple 11. On verra par exemple que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est CV mais n'est pas ACV (absolument convergente) car $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ est divergente (série harmonique).

Propriété 37.23

Si une série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors (elle est convergente) et :

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$$

Démonstration. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a en effet $\left|\sum_{n=0}^{N} u_n\right| \leq \sum_{n=0}^{N} |u_n|$. En passant à la limite quand $N \to +\infty$, on a le résultat voulu (par continuité de $x \mapsto |x|$). □

3.3 Théorèmes de convergence avec O et o

Propriété 37.24 (Règle des O et de o)

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries. On suppose que $u_n = O(v_n)$ ou $u_n = o(v_n)$.

- Si $\sum v_n$ est ACV, alors $\sum u_n$ est ACV.
- Si $\sum u_n$ n'est pas ACV, alors $\sum v_n$ n'est pas ACV.

Démonstration. On sait que $u_n = O(v_n)$ ssi $|u_n| = O(|v_n|)$. On peut donc appliquer la règle des O et o pour des séries positives et en déduire des résultats de CV / DV sur $\sum |u_n|$ et $\sum |v_n|$, ce qui donne le résultat voulu. □

Méthode

Quand on cherche uniquement la nature d'une série, il peut être avantageux de chercher un développement asymptotique en $\frac{1}{n}$ (ou autre) lorsque n tend vers $+\infty$.

Exemple 12. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \left(\sin\frac{1}{n} - \tan\frac{1}{n}\right)$.

4 Séries alternées

4.1 Reste d'une série convergente

Définition 37.25

Soit $\sum u_n$ une série **convergente**. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le reste d'ordre n de la série $\sum u_n$ par

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Autrement dit, si on note la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et la somme $S_\infty = \sum_{n=0}^{+\infty} u_k$, alors $R_n = S_\infty - S_n$. En particulier, on a toujours

$$R_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Cette définition n'a pas de sens si $\sum u_n$ diverge, car alors $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ ne serait pas défini.

Exemple 13. On considère la série géométrique $\sum q^n$ avec $q \in \mathbb{K}$ et $|q| < 1$. Déterminer le reste de cette série.

4.2 Théorème de convergence des séries alternées

Définition 37.26

$\sum u_n$ est dite une <u>série alternée</u> si son terme général peut s'écrire $u_n = (-1)^n v_n$ avec (v_n) une suite réelle de signe constant.

Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de u_{n+1} est opposé à celui de u_n.

Théorème 37.27 (Théorème des séries alternées)

Soit $\sum (-1)^n v_n$ une série où (v_n) est une suite réelle (positive) **décroissante** qui **converge vers 0**. Alors :

1. La série $\sum (-1)^n v_n$ est convergente.
2. En notant S_n la somme partielle de rang n et S_∞ la somme de $\sum (-1)^n v_n$, alors :
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_{2n+1} \leq S_\infty \leq S_{2n} \tag{$*$}$$
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le reste $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k v_k$ vérifie
$$|R_n| \leq v_{n+1}$$

Comme la suite (v_n) est décroissante et a 0 pour limite, on montre facilement qu'elle est nécessairement positive.

Démonstration. On va montrer que les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes. Regardons leur monotonies. D'une part,

$$\begin{aligned} S_{2(n+1)} - S_{2n} &= (-1)^{2n+2} v_{2n+2} + (-1)^{2n+1} v_{2n+1} \\ &= v_{2n+2} - v_{2n+1} \leq 0 \end{aligned}$$

car (v_n) est décroissante. Donc (S_{2n}) est décroissante. D'autre part,

$$\begin{aligned} S_{2n+3} - S_{2n+1} &= (-1)^{2n+3} v_{2n+3} + (-1)^{2n+2} v_{2n+2} \\ &= -v_{2n+3} + v_{2n+2} \geq 0 \end{aligned}$$

donc (S_{2n+1}) est croissante. Enfin, comme (v_n) tend vers 0,

$$S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{n+1} v_{n+1} \to 0$$

Donc (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes : elles convergent vers la même limite qu'on note ℓ. De plus, ces suites encadrent la limite :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad S_{2n+1} \leq \ell \leq S_{2n}$$

Comme $S_{2n} \to \ell$ et $S_{2n+1} \to \ell$, on peut montrer que $S_n \to \ell$ en revenant à la définition de la limite.
Ainsi, $\sum (-1)^n v_n$ est convergente et sa somme S_∞ vaut ℓ. On a donc montré les première et deuxième assertions.

Montrons enfin la troisième assertion. Pour les rangs impairs, d'après $(*)$, on a

$$\begin{aligned} |R_{2n+1}| &= |S - S_{2n+1}| = S - S_{2n+1} \\ &\leq S_{2n} - S_{2n+1} = -(-1)^{2n+1} v_{2n+1} = v_{2n+1} \end{aligned}$$

et on montre de manière similaire l'inégalité $|R_{2n}| \leq v_{2n}$. □

Exemple 14. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge.

5 Récapitulatif des méthodes

Méthode (Nature d'une série $\sum u_n$)

Pour étudier la nature d'une série $\sum u_n$, on peut utiliser les méthodes suivantes :

1. Si u_n ne tend pas vers 0, il y a divergence grossière.
2. Reconnaitre une série usuelle : $\displaystyle\sum q^n, \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}, \sum \frac{z^n}{n!}$
3. Si la série $\sum u_n$ est alternée, on peut utiliser le théorème associé.
4. Si $u_n \geq 0$ (à partir d'un certain rang) :
   (a) Étudier si la somme partielle $\displaystyle S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ est majorée.
   (b) Pour la CV de $\sum u_n$, on cherche $v_n \geq 0$ telle que $u_n = O(v_n)$ / $u_n = o(v_n)$ / $u_n \leq v_n$ et tq $\sum v_n$ CV
   (c) Pour la DV de $\sum u_n$, on cherche $v_n \geq 0$ telle que $v_n = O(u_n)$ / $v_n = o(u_n)$ / $v_n \leq u_n$ et tq $\sum v_n$ DV
   (d) Si $u_n \sim v_n$ alors $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.
5. Si on n'a pas d'information sur le signe de u_n :
   (a) Montrer que la série $\sum u_n$ est ACV, en s'inspirant des méthodes ci-dessus
   (b) Montrer l'ACV par un dév. asympt. de u_n : chercher v_n tq $u_n = O(v_n)$ / $u_n = o(v_n)$ et $\sum v_n$ ACV
6. Poser f telle que $u_n = f(n)$ et réaliser une comparaison série-intégrale.
7. Faire des réécritures : sommes téléscopiques, technique $+1-1$, etc.